Cvičení Programování I

Cvičící: **Pavel Surynek, KTIML**
surynek@ktiml.mff.cuni.cz
http://ktiml.mff.cuni.cz/~surynek
Semestr: **Zima 2007/2008**
Kroužek: **Matematika/53**
Rozvrh: **Středa 12:20-13:50 (učebna K7)**

Stručné poznámky ke cvičení z 24.10.2007

1. Organizační záležitosti. Za domácí úkol byly úlohy **potravní řetězec**, **podivný sud** a **zase sirky**.

2. Konečnost algoritmu. Konečnost algoritmů se ověřuje tak, že jednotlivé stavy algoritmu ohodnotíme - například přirozenými nebo nezápornými reálnými čísly a snažíme se dokázat, že toto ohodnocení v průběhu algoritmu klesá.

a) Dokažte, že Euklidův algoritmus na nalezení největšího společného dělitele dvou čísel je konečný.

b) Uvažujme dva algoritmy, jejichž stavy jsou ohodnoceny reálnými čísly. Oba algoritmy končí při ohodnocení 0. Pro ohodnocení stavů $h: S \to R$, kde S je množina stavů, prvního algoritmu splatí, že

$\exists \delta \in R, \delta > 0$, že $\forall i \quad h(stav(i)) \geq h(stav(i+1)) + \delta$, kde $stav(i)$ je stav algoritmu v kroku i. Pro druhý algoritmus platí, že

$\forall i \; \exists \delta \in R, \delta > 0$, že $h(stav(i)) \geq h(stav(i+1)) + \delta$, kde $stav(i)$ je stav algoritmu v kroku i. Vyšetřete konečnost obou algoritmů.

3. Jak dlouho může běžet program. Je možné pro libovolné $t > 0$ napsat program, který běží více než t vteřin a pak zastaví. Předpokládáme přitom, že počítač, na kterém program běží, splňuje běžná fyzikální omezení, tj. například provedení elementární operace trvá určitou dobu, velikost paměti je konečná atd. Na druhou stranu si situaci trochu idealizujeme - předpokládáme, že počítač může bez poruchy fungovat libovolně dlouho.

4. Sedlový bod. Je dána čtvercová matice nad celými čísly. Navrhněte postup jak co nejrychleji v této matici nalézt sedlový bod. Sedlový bod je místo v matici, které obsahuje největší hodnotu ve svém řádku a nejmenší hodnotu ve svém sloupci nebo nejmenší hodnotu ve svém řádku a největší hodnotu ve svém sloupci. Snažte se minimalizovat počet kroků, přičemž za krok považujeme každé podívání se na políčko matice. Nápověda: předvýpočet.

5. Vyhledávání s setříděné posloupnosti. Je dána setříděná posloupnost N přirozených čísel (například: 5, 20, 27, 35, 60, 66, 91). Navrhněte algoritmus, který pro dané přirozené číslo x (například: 26) a zmiňovanou posloupnost a rozhodne, zda se zadané přirozené číslo nachází v zadané posloupnosti (v uvedeném příkladě bude odpověď ne). Algoritmus může provádět operace porovnání a v každém kroku se „může podívat“ na jedno číslo na libovolné pozici v posloupnosti. Snažte se minimalizovat počet kroků algoritmu (porovnání, podívání se, ... se považuje za krok).

6. Pigeonhole principle (každý holub má svou přihrádku). Booleovská formule v konjunktivně disjunktivním tvaru je konjunkce disjunkcí. Například $(x_1 \vee x_3 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_6) \wedge (\neg x_2 \vee x_3)$, kde x_i jsou Booleovské proměnné, tj. proměnné, které mohou nabývat hodnot *pravda* či *nepravda*. Pro formule tohoto tvaru se často používá zjednodušený zápis kdy pouze vypíšeme indexy proměnných v jednotlivých disjunkcích s případným znaménkem mínus, pokud jde o negaci proměnné. Formule $(x_1 \vee x_3 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_3)$ by se tedy dala napsat jako:

1 3 -5
2 -3 4
-2 3

Máme-li formuli, zajímavou otázkou je, zda pro ni existuje ohodnocení proměnných takové, že celkově je tato formule pravdivá. Formule $(x_1 \vee x_3 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_6) \wedge (\neg x_2 \vee x_3)$ má pravdivé ohodnocení $x_1 = pravda$, $x_2 = pravda$, $x_3 = pravda$ a ostatní proměnné libovolně. Pokuste se zjistit, zda existuje pravdivé ohodnocení pro následující formuli. Navrhněte algoritmus, který by provedl práci za Vás.

-1 -7
-1 -13
-1 -19
-1 -25
-1 -31
-1 -37
-7 -13
-7 -19
-7 -25
-7 -31
-7 -37
-13 -19
-13 -25
-13 -31
-13 -37
-19 -25
-19 -31
-19 -37
-25 -31
-25 -37
-31 -37
-2 -8
-2 -14
-2 -20
-2 -26
-2 -32
-2 -38
-8 -14
-8 -20
-8 -26
-8 -32
-8 -38
-14 -20
-14 -26
-14 -32
-14 -38
-20 -26
-20 -32
-20 -38
-26 -32
-26 -38
-32 -38
-3 -9
-3 -15
-3 -21
-3 -27
-3 -33
-3 -39
-9 -15
-9 -21
-9 -27
-9 -33
-9 -39
-15 -21
-15 -27
-15 -33
-15 -39
-21 -27
-21 -33
-21 -39
-27 -33
-27 -39
-33 -39

-4	-10
-4	-16
-4	-22
-4	-28
-4	-34
-4	-40
-10	-16
-10	-22
-10	-28
-10	-34
-10	-40
-16	-22
-16	-28
-16	-34
-16	-40
-22	-28
-22	-34
-22	-40
-28	-34
-28	-40
-34	-40
-5	-11
-5	-17
-5	-23
-5	-29
-5	-35
-5	-41
-11	-17
-11	-23
-11	-29
-11	-35
-11	-41
-17	-23
-17	-29
-17	-35
-17	-41
-23	-29
-23	-35
-23	-41
-29	-35
-29	-41
-35	-41
-6	-12
-6	-18
-6	-24
-6	-30
-6	-36
-6	-42
-12	-18
-12	-24
-12	-30
-12	-36
-12	-42
-18	-24
-18	-30
-18	-36
-18	-42
-24	-30
-24	-36
-24	-42
-30	-36
-30	-42
-36	-42

6	5	4	3	2	1
12	11	10	9	8	7
18	17	16	15	14	13
24	23	22	21	20	19
30	29	28	27	26	25
36	35	34	33	32	31
42	41	40	39	38	37