Cvičení Programování I

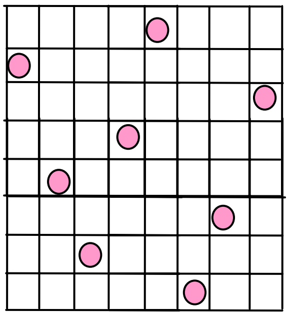
Cvičící: **Pavel Surynek, KTIML**
`surynek@ktiml.mff.cuni.cz`
`http://ktiml.mff.cuni.cz/~surynek`
Semestr: **Zima 2007/2008**
Kroužek: **Matematika/53**
Rozvrh: **Středa 12:20-13:50 (učebna K7)**

Stručné poznámky ke cvičení z 17.10.2007

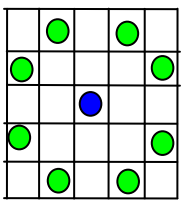
1. Organizační záležitosti. Za domácí úkol zůstal důkaz optimality řešení (lepší řešení neexistuje) k úloze o **velbloudovi a banánech**, úloha o **hledání nejtěžší a druhé nejtěžší kuličky** pro počet kuliček, který není mocninou dvojky, a úloha **plánování pro jeřáby a náklaďák**.

2. Osm královen. Je dána šachovnice o velikosti 8×8 políček. Rozmístěte po šachovnici 8 královen tak, aby se vzájemně neohrožovaly. Když na šachovnici budeme pohlížet jako na mřížku s osmi řádky a osmi sloupci, pak královna v řádku r_1 a sloupci s_1 ohrožuje královnu v řádku r_2 a sloupci s_2, jestliže $r_1 = r_2$ nebo $s_1 = s_2$ nebo $|r_1 - r_2| = |s_1 - s_2|$.

Řešení (bez odůvodnění)**.**



3. Koník. Je dána šachovnice o velikosti $n \times n$. Dále jsou zadány souřadnice políčka, na kterém stojí šachová figurka kůň, a souřadnice políčka, kam chceme koně pomocí dovolených tahů přesunout. Napište v Pascalu program, který nalezne nejkratší posloupnost tahů, kterými lze koně přesunou ze startovního políčka do cílového. Připomenutí dovolených tahů (modré kolečko značí výchozí pozici, zelená kolečka označují dovolené tahy):



Začněte řešením pro $n = 6$. Podaří-li se Vám řešení nalézt, zkuste $n = 8$.

Řešení (bez odůvodnění pro $n = 6$).

1	18	3	10	7	16
4	9	6	17	32	11
19	2	31	8	15	24
30	5	28	23	12	33
27	20	35	14	25	22
36	29	26	21	34	13

4. Potravní řetězec. Přes řeku z jednoho břehu na druhý musí *pastevec* na voru bezpečně přepravit *vlka*, *kozu* a *zelí*. Pod dohledem pastevce se zvířátka navzájem nežerou. Když na ně ale pastevec nedohlíží, tak vlk sežere kozu, pokud jsou na stejném břehu, resp. koza sežere zelí. Vor uveze s pastevcem (ten musí vor řídit) nejvýše jedno zvířátko.

Řešení. **levý břeh:** pastevec, vlk, koza, zelí **pravý břeh:** ----

1.krok: pastevec převeze kozu na pravý břeh

levý břeh: vlk, zelí **pravý břeh:** pastevec, koza

2.krok: pastevec se vrátí levý břeh

levý břeh: pastevec, vlk, zelí **pravý břeh:** koza

3.krok: pastevec převeze vlka na pravý břeh

levý břeh: zelí **pravý břeh:** pastevec, vlk, koza

4.krok: pastevec převeze kozu na levý břeh

levý břeh: pastevec, koza, zelí **pravý břeh:** vlk

5.krok: pastevec převeze zelí na pravý břeh

levý břeh: koza **pravý břeh:** pastevec, vlk, zelí

6.krok: pastevec se vrátí na levý břeh

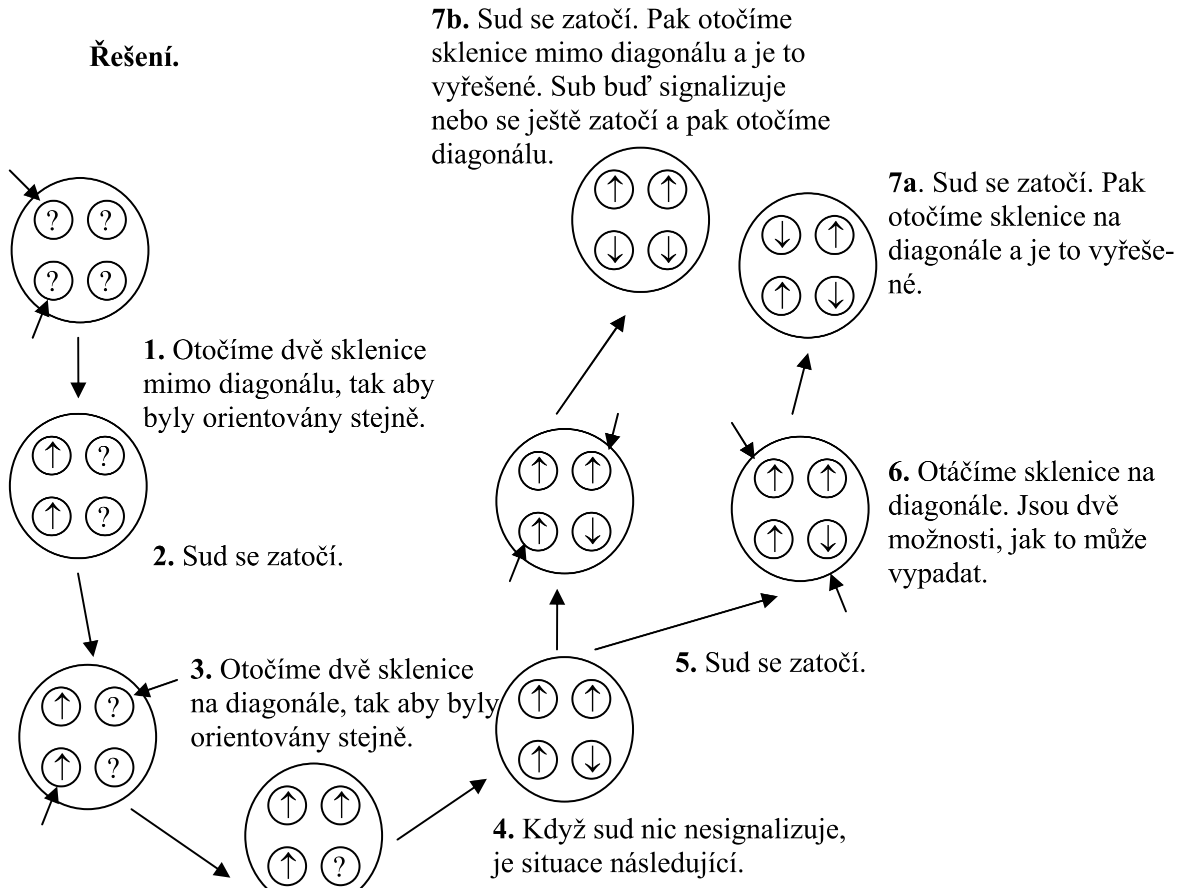
levý břeh: pastevec, koza **pravý břeh:** vlk, zelí

7.krok: pastevec převeze kozu na pravý břeh

levý břeh: ---- **pravý břeh:** pastevec, vlk, koza, zelí

5. Podivnost. V sudu jsou schovány 4 sklenice. Ve víku na sudu jsou 4 otvory, každá ze sklenic je pod jedním z otvorů (otvory jsou na 3, 6, 9 a 12 hodinách). Sklenice může být otočená dnem dolů nebo dnem vzhůru. Vaším úkolem je otočit sklenice tak, aby byly všechny orientovány stejně, tj. všechny dnem dolů nebo všechny dnem vzhůru. Podaří-li se to sud to nějakým způsobem signalizuje. Samozřejmě tu máme nějaká omezení: do sudu můžeme sáhnout jen oběma rukama najednou, každou rukou do jednoho otvoru ve víku. Po hmatu je možné poznat, jak jsou sklenice orientovány. Podle toho můžeme otočit obě, jednu nebo žádnou sklenici. Potom se ale sud zatočí a zcela náhodně se zastaví a pokračujeme dalším tahem.

Řešení.



6. Zase sirky. Na hromádce je zase N sirek. Nad touto hromádkou se sejdou dva hráči a budou hrát hru. Hráči se střídají a v každém tahu může hráč odebrat 2^k sirek, kde $k \in \{0,1,2,...\}$. Když hráč nemůže provést tah, tj. když na něj nezbyla žádná sirka, prohrál. Navrhněte optimální hrací strategii.

Řešení. Uvažme nejprve situace, kdy zbývá malý počet sirek, řekněme 1,2,3,4,5,6. Snadno zjistíme, že když je na tahu první hráč a zbývá 1,2,4 nebo 5 sirek, tak vyhraje (prohraje druhý hráč). Když je na tahu první hráč a zbývá 3 nebo 6 sirek, tak prohraje (vyhraje druhý hráč). Toto snadné zjištění se provede tak, že vyzkoušíme všechny možné způsoby hraní v daných situacích (sirek je málo, takže to jde). Zdá se tedy, že bychom mohli vyslovit hypotézu, že když zbývá $3m$ sirek, kde $m \in \{0,1,2,...\}$, a je na tahu první hráč, tak první hráč prohraje (vyhraje druhý hráč). A zároveň, když zbývá $3m+1$ nebo $3m+2$, kde $m \in \{0,1,2,...\}$, a je na tahu první hráč, tak první hráč vyhraje (prohraje druhý hráč). Zkusme tedy tuto hypotézu dokázat. Postupovat budeme matematickou indukcí. Pro počet zbývajících sirek $N = 1,2,3,4,5$ a 6 je hypotéza již dokázána, to nám poslouží jako počáteční krok indukce. Mějme tedy $N > 6$ a předpokládejme, že hypotéza platí pro všechny menší počty zbývajících sirek. Dále předpokládejme, že hráč-protivník hraje, jak nejlépe může. Z hlediska hledání optimální strategie nebude vadit, kdyby hrál hůře. Kdyby hrál protivník hůře než je jeho nejlepší (optimální) strategie umožní, nám to vítězství i v původně prohrávajících situacích. Nechť $N = 3m$ pro nějaké $m \in \{0,1,2,...\}$ a nechť je na tahu první hráč. Potom, když první hráč provede libovolný tah, zbude po jeho tahu $3n+1$ nebo $3n+2$ sirek, kde $n \in \{0,1,2,...\}$ a $n < m$. $3n$, kde $n < m$, sirek zbýt po tahu nemůže, protože pak by se dala vyřešit rovnice $3j = 2^i$, což nejde. Tedy, po provedení tahu prvního hráče hraje druhý hráč a zbývá na něj $3n+1$ nebo $3n+2$ sirek, z indukčního předpokladu víme, že v takové situaci druhý hráč vyhrává, tedy prohrává první hráč, což potvrzuje hypotézu. Nechť $N = 3m+1$ nebo

$N = 3m + 2$ pro nějaké $m \in \{0,1,2,...\}$ a nechť je na tahu první hráč. Potom se první hráč může jedním tahem dostat do situace, kdy zbývá $3m$ sirek a je na tahu druhý hráč. Z indukčního předpokladu víme, že v takovém případě druhý hráč prohrává, tedy vyhrává první hráč. To je opět v souladu s hypotézou. Tím je hypotéza dokázána pro všechna N .