Cvičení Programování I

Cvičící: **Pavel Surynek, KTIML,**
`pavel.surynek@seznam.cz`
Semestr: **Zima 2005/2006**
Kroužek: **Matematika/59**
Rozvrh: **Pátek 10:40-12:10 (učebna K2)**

Stručné poznámky ke cvičení ze 21.10.2005

1. Organizační záležitosti. Bude se konat úvod do vývojového prostředí Turbo Pascal v některé z počítačových laboratoří. Odhlasovalo se, že se schůzka za účelem tréninku Pascalu bude konat v pátek 4.11. v počítačové laboratoři v Karlíně.

Jakékoli **dotazy** ke cvičení lze posílat na uvedenou e-mailovou adresu. Osobní konzultace ke cvičení lze dohodnout e-mailem (alespoň den předem).

2. Úloha o odebírání sirek (první varianta). Na hromádce je N sirek. Nad touto hromádkou se sejdou dva hráči a budou hrát hru následujícím způsobem. Hráči se střídají a v každém tahu hráč odebere 2^k sirek, kde $k \in \{0,1,2,...\}$ a je největší možné. Když hráč nemůže provést tah, tj. když na něj nezbyla žádná sirka, prohrál. Navrhněte optimální hrací strategii.

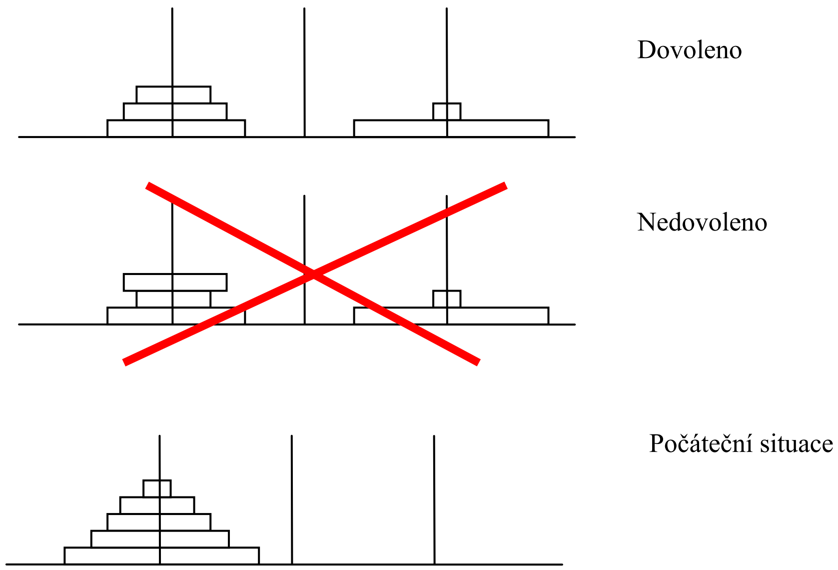
> **Řešení.** Je velmi snadné! Není co navrhovat, stačí se podívat na dvojkový zápis čísla N. **Vsuvka:** co je to dvojkový zápis čísla N ? Dvojkový (nebo také binární) zápis čísla N je $b_l ... b_2 b_1 b_0$, kde $N = b_l 2^l + ... + b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0 2^0$, přičemž $b_i \in \{0,1\} \quad \forall i$. Například číslo 13 má dvojkový zápis 1101. K tomu lze dojít například tak, že 13/2=6 a zbytek je 1 (zapíšeme 1 do výsledného čísla), 6/2=3 a zbytek je 0 (zapíšeme 0 do výsledného čísla), 3/2=1 a zbytek je 1 (zapíšeme 1 do výsledného čísla) a nakonec 1/2=0 a zbytek je 1 (zapíšeme 1 do výsledného čísla). Zpět k úloze. Co se děje s dvojkovým zápisem počtu zbývajících sirek, když hráč provede tah ? Odpověď je jednoduchá. Zmizí jednička na první pozici (na pozici určující nejvyšší řád). To znamená, že hra je určena pouze počtem jedniček ve dvojkovém zápisu počtu sirek na začátku hry. Když je počet jedniček ve dvojkovém zápisu čísla N sudý, tak hráč, který začíná hru jistě prohraje. A naopak, když je počet jedniček ve dvojkovém zápise čísla N lichý, tak hráč, který hru začíná jistě vyhraje.

3. Úloha o odebírání sirek (druhá varianta). Na hromádce je zase N sirek. A zase se nad touto hromádkou sejdou dva hráči a budou hrát hru. Hráči se střídají a v každém tahu hráč odebere 2^k sirek, kde $k \in \{0,1,2,...\}$. Když hráč nemůže provést tah, tj. když na něj nezbyla žádná sirka, prohrál. Navrhněte optimální hrací strategii. Rozdíl oproti první variantě je, že nepožadujeme, aby hráč odebíral maximální počet sirek, které mu dovoluje dané pravidlo.

> **Řešení.** Trochu to bylo za DCV. Uvažme nejprve situace, kdy zbývá malý počet sirek, řekněme 1,2,3,4,5,6. Snadno zjistíme, že když je na tahu první hráč a zbývá 1,2,4 nebo 5 sirek, tak vyhraje (prohraje druhý hráč). Když je na tahu první hráč a zbývá 3 nebo 6 sirek, tak prohraje (vyhraje druhý hráč). Toto snadné zjištění se provede tak, že vyzkoušíme všechny možné způsoby hraní v daných situacích (sirek je málo, takže to jde). Zdá se tedy, že bychom mohli vyslovit hypotézu, že když zbývá $3m$ sirek, kde $m \in \{0,1,2,...\}$, a je na tahu první hráč, tak první hráč prohraje (vyhraje druhý hráč). A zároveň, když zbývá $3m+1$ nebo $3m+2$, kde $m \in \{0,1,2,...\}$, a je na tahu první hráč, tak první hráč vyhraje (prohraje druhý hráč). Zkusme tedy tuto hypotézu dokázat. Postupovat budeme matematickou indukcí. Pro počet zbývajících

sirek $N = 1,2,3,4,5$ a 6 je hypotéza již dokázána, to nám poslouží jako počáteční krok indukce. Mějme tedy $N > 6$ a předpokládejme, že hypotéza platí pro všechny menší počty zbývajících sirek. Dále předpokládejme, že hráč-protivník hraje, jak nejlépe může. Z hlediska hledání optimální strategie nebude vadit, kdyby hrál hůře. Kdyby hrál protivník hůře než je jeho nejlepší (optimální) strategie umožní, nám to vítězství i v původně prohrávajících situacích. Nechť $N = 3m$ pro nějaké $m \in \{0,1,2,...\}$ a nechť je na tahu první hráč. Potom, když první hráč provede libovolný tah, zbude po jeho tahu $3n+1$ nebo $3n+2$ sirek, kde $n \in \{0,1,2,...\}$ a $n < m$. $3n$, kde $n < m$, sirek zbýt po tahu nemůže, protože pak by se dala vyřešit rovnice $3j = 2^i$, což nejde. Tedy, po provedení tahu prvního hráče hraje druhý hráč a zbývá na něj $3n+1$ nebo $3n+2$ sirek, z indukčního předpokladu víme, že v takové situaci druhý hráč vyhrává, tedy prohrává první hráč, což potvrzuje hypotézu. Nechť $N = 3m+1$ nebo $N = 3m+2$ pro nějaké $m \in \{0,1,2,...\}$ a nechť je na tahu první hráč. Potom se první hráč může jedním tahem dostat do situace, kdy zbývá $3m$ sirek a je na tahu druhý hráč. Z indukčního předpokladu víme, že v takovém případě druhý hráč prohrává, tedy vyhrává první hráč. To je opět v souladu s hypotézou. Tím je hypotéza dokázána pro všechna N.

4. Hanojské věže. Hra hanojské věže vypadá tak, že máme tři kolíky, na kterých jsou navlečeny disky různých velikostí (různých průměrů). Musí platit, že když jsou dva disky navlečeny na stejném kolíku, tak menší disk vždy leží na větším disku. Na začátku hry jsou všechny disky na prvním kolíku. Následující obrázek to ilustruje.



Pravidla hry jsou jednoduchá, vždy je možné přemístit disk z jednoho kolíku na jiný s tím, že cílový kolík je buď prázdný nebo vrchní disk na cílovém kolíku je větší než přemisťovaný disk. Úkolem hry je přemístit všechny disky z prvního kolíku na jiný (na druhý nebo třetí). Určete počet nejmenší počet kroků potřebných k vyřešení úlohy. Předpokládejme, že na prvním kolíku je N disků. Využijte symbolu O pro asymptotickou nerovnost funkcí.

Řešení. Úlohu lze vyřešit rekurzivním rozkladem. Mějme na prvním kolíku N disků. Předpokládejme, že umíme úlohu vyřešit pro $N-1$ disků. Pak lze úlohu s N disky vyřešit tak, že nejprve přemístíme $N-1$ disků z prvního kolíku na jiný kolík (ne na ten, který jsme si zvolili za cílový). Dále přesuneme zbylý (největší) disk z prvního kolíku na cílový a nakonec přemístíme $N-1$ disků z pomocného (ne první a ne cílový) kolíku na cílový. Samozřejmě při tomto rekurzivním rozkladu musíme umět vyřešit úlohu pro $N = 1$, což umíme (jen se přemístí ten jeden disk na cílový kolík). Označme $K(N)$ nejmenší počet kroků potřebných k vyřešení úlohy s N disky na prvním kolíku. Z uvedeného postupu víme, že platí:

$K(1)=1$ a

$K(N)=K(N-1)+K(N-1)+1=2K(N-1)+1$.

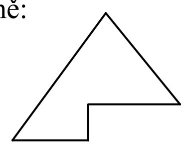
Řešíme tedy rekurzivní rovnici. Zkusíme dosadit pár hodnot a rozepsat výraz podle rekurzivního zadání. $K(1)=1$, $K(2)=2K(1)+1=3$, $K(3)=2K(2)+1=2(2K(1)+1)+1=$ $=2*3+1=7$, atd. Můžeme vyslovit hypotézu, že $K(N)=2^N-1$. Pro několik prvních N to platí. Dále budeme postupovat matematickou indukcí, nechť hypotéza platí pro všechna $n<N$, tedy $K(n)=2^n-1$ pro všechna $n<N$. $K(N)=2K(N-1)+1$, z indukčního předpokladu víme, že $K(N-1)=2^{N-1}+1$. To dosadíme: $K(N)=2(2^{N-1}-1)+1=2^N-2+1=2^N-1$. Tím je hypotéza dokázána.

Zapišme to asymptoticky: $K(N)$ je $O(2^N)$.

Vsuvka: Když platí, že f je $O(g)$, čili funkce f je asymptoticky menší nebo rovna funkci g, a zároveň g je $O(f)$, čili, že funkce g je asymptoticky menší nebo rovna funkci f, říkáme, že funkce f a g jsou asymptoticky stejné, značíme to f je $\Theta(g)$ (velké řecké písmeno théta), což je ekvivalentní g je $\Theta(f)$. V tomto příkladě můžeme klidně napsat, že $K(N)$ je $\Theta(2^N)$, protože jsme to spočítali přesně. Asymptotickou stejnost, ale například nebylo možno použít v příkladě o vážení kuliček pomocí stromového schématu (úloha 4. ze 14.10.). Rozmyslet proč (je to jednoduché) !

5. Hromada čili halda. Hromada, přesněji 2-regulární hromada, je binární strom splňující následující podmínky:

i. (trochu neformálně) Strom je zaplňován zleva, tj. vždy vypadá následovně:



ii. Uzly stromu jsou ohodnoceny a platí, že ohodnocení synů vrcholu v je větší (větší nebo rovno) než ohodnocení vrcholu v (jejich otce).

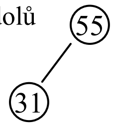
Vsuvka: Co je to strom ? Strom je souvislý graf bez kružnic. Co je to graf ? Neformálně: graf jsou vrcholy, z nichž některé jsou po dvojicích pospojované spojnicemi (čárami). Formálněji graf G je dvojice (V,E), kde V je množina vrcholů a $E\subseteq\binom{V}{2}$ je množina hran. Přičemž $\binom{V}{2}$ značí všechny dvojice vrcholů. Souvislost znamená, že je možné dostat se z libovolného vrcholu přes hrany do libovolného jiného vrcholu. Graf obsahuje kružnici, když mezi dvěma vrcholy existují dvě různé cesty, jak se z jednoho dostat skrz hrany do druhého.

Definici a konstrukci haldy objasníme na příkladu. Budeme chtít do haldy vložit prvky 55, 31, 4, 27, 99, 42 a 2.

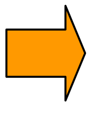
1. Vložíme prvek 55 „dolů a doleva“

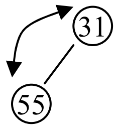
Všechny podmínky jsou splněny

2. Vložíme prvek 31 „dolů a doleva“

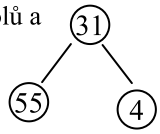


Podmínka na tvar stromu je splněna, ale není splněna podmínka na uspořádání

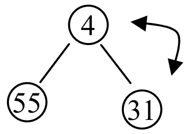




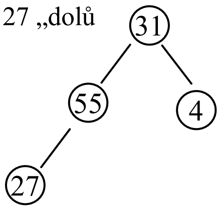
3. Vložíme prvek 4 „dolů a doleva“



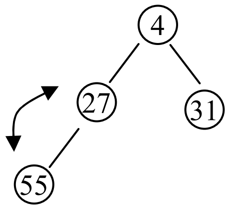
Podmínka na tvar stromu je splněna, ale není splněna podmínka na uspořádání



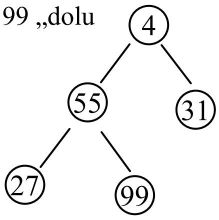
4. Vložíme prvek 27 „dolů doleva“



Podmínka na tvar stromu je splněna, ale není splněna podmínka na uspořádání

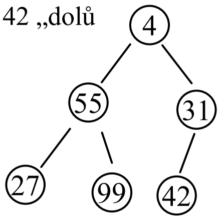


5. Vložíme prvek 99 „dolu a doleva“



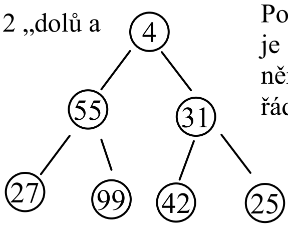
Všechny podmínky na haldu jsou splněny

6. Vložíme prvek 42 „dolů doleva“

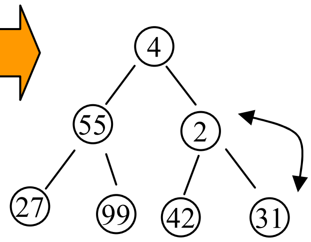


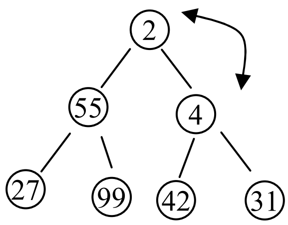
Všechny podmínky na haldu jsou splněny

7. Vložíme prvek 2 „dolů a doleva“



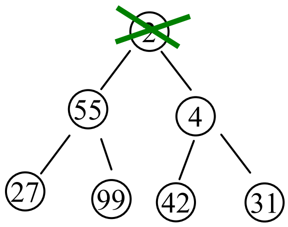
Podmínka na tvar stromu je splněna, ale není splněna podmínka na uspořádání





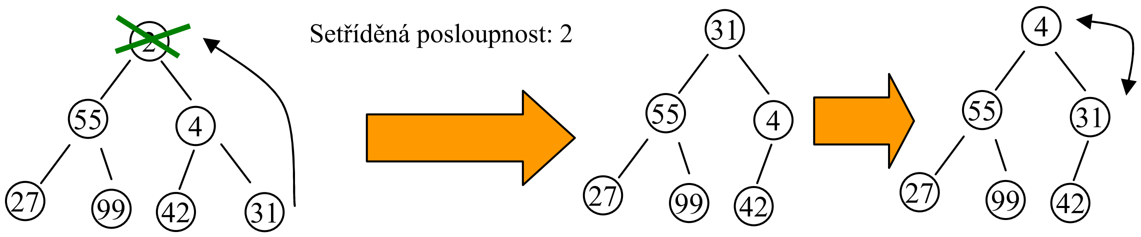
Při konstrukci haldy postupujeme tak, že vytvoříme uzel stromu do ještě nezaplněné hladiny co nejví-ce doleva, tam vložíme nový prvek. Tím se ale může porušit podmínka na uspořádání. Tu opravíme tak, že prohodíme otce a prvek nový prvek. Tím ale můžeme porušit podmínku na uspořádání pro otce nově vytvořeného vrcholu. Opět podmínku opravíme stejným způsobem a pokračujeme tak dlouho dokud se podmínku na uspořádání nepodaří pro předchůdce změněného vrcholu splnit nebo nedojdeme ke kořeni stromu.

Evidentně platí, že v kořeni stromu je nejmenší prvek. Pokusme se toho využít pro setřídění prvků. Odeberme kořen haldy a jeho hodnotu zařaďme do setříděné posloupnosti.



Setříděná posloupnost: 2

Nyní je potřeba haldu opravit. To se provede tak, že do kořene přesuneme nejpravější vrchol z nejspodnější hladiny. Tím zajistíme splnění podmínky na tvar haldy, ale poruší se tím podmínka na uspořádání. Podmínku na uspořádání opravíme postupným snižováním nového kořene směrem k synovi s menším ohodnocením. To provádíme tak dlouho dokud není podmínka na uspořádání splněna.



Vaším úkolem je spočítat počet kroků, jež je potřeba na setřídění posloupnosti N čísel. Za krok se považuje jakákoli elementární operace. Představte si, že úlohu řešíte pomocí tužky a papíru, elementární operací je pak třeba nakreslení čárky. Počet kroků vyjádřete asymptoticky. Využijte symbolu O nebo Θ.

Řešení. Bylo za DCV.

6. Nenažraný velbloud. Velbloud stojí na poušti u hromady banánů (tentokrát je to normální hromada v běžném slova smyslu, ne ta z předchozí úlohy). Banánů je 3000. Úkolem je dopravit co nejvíce banánů do 1000 km vzdálené oázy. Velbloud uveze nejvýše 1000 banánů. Problém je, že velbloud má jistou spotřebu, jmenovitě jeden banán na jeden kilometr. Cestou si velbloud může kdykoli jakýkoli počet banánů odložit a potom se k nim vrátit.