Cvičení Programování I

Cvičící: **Pavel Surynek, KTIML,**
`pavel.surynek@seznam.cz`
Semestr: **Zima 2005/2006**
Kroužek: **Matematika/59**
Rozvrh: **Pátek 10:40-12:10 (učebna K2)**

Stručné poznámky ke cvičení ze 18.11.2005

1. Organizační záležitosti. První **série témat na zápočtový program** je zhruba následující: hry - piškvorky, karty, sudoku, kalendáře, textové editory, formátovaní textu, prohlížeče souborů se zalamováním řádků, simulátor procesoru, interpret jazyka, kalkulačka výrazová, kalkulačka na velká čísla, kreslítka na funkce, grafika - raytracing kuliček, vektorové kreslítko, bitmapove kreslítko, simulace - gravitace, aerodynamika, galaktické srážky, neuronové sítě - rozpoznávání písmen.

Jakékoli **dotazy** ke cvičení lze posílat na uvedenou e-mailovou adresu. Osobní konzultace ke cvičení lze dohodnout e-mailem (alespoň den předem).

2. Souvislost grafu maticově. Vsuvka: Násobení matic. Nechť A je matice typu $m \times n$ nad přirozenými čísly

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{kde } a_{ij} \in N \text{ pro } i \in \{1,2,...,m\},\, j \in \{1,2,...,n\}$$

nechť B je matice typu $n \times k$ nad přirozenými čísly

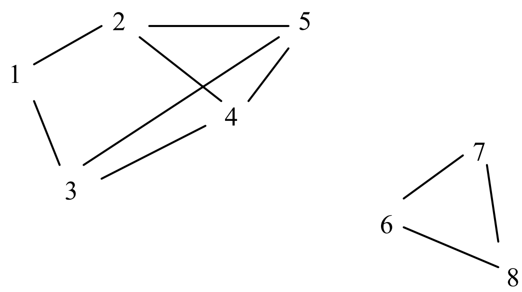
$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}, \text{kde } b_{ij} \in N \text{ pro } i \in \{1,2,...,n\},\, j \in \{1,2,...,k\}.$$

Součinem matic A a B je matice C typu $m \times k$ nad přirozenými čísly

$$A \times B = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}, \text{kde } c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} \text{ pro } i \in \{1,2,...,m\},\; j \in \{1,2,...,k\}.$$

Násobení matic lze snadno definovat též pro Boolovské matice, tj. matice nad $\{0,1\}$, resp. $\{pravda, nepravda\}$. Stačí nahradit operaci součtu operací logického součtu a operaci součinu operací logického součinu.

Je dán neorientovaný graf $G = (V, E)$, kde $V = \{1,2,...,n\}$, pro n přirozené číslo, a $E \subseteq \binom{V}{2}$. V je množina vrcholů a E je množina hran. Graf lze znázornit diagramem, jako například na následujícím obrázku (vrcholy jsou vrcholy a hrany spojnice mezi vrcholy):



Uvedený graf lze jednoznačně reprezentovat pomocí Boolovské matice M typu $n \times n$, kde $m_{ij} = 1$, právě když $\{i, j\} \in E$ a $m_{ij} = 0$ jinak, a toto platí pro každé $i, j \in \{1,2,...,n\}$. Matice M se nazývá **matice sousednosti** grafu G. V matici $M' = M \times M$ je $m'_{ij} = 1$, právě když mezi vrcholy i a j vede cesta délky 2, $m'_{ij} = 0$ jinak, a toto platí pro každé $i, j \in \{1,2,...,n\}$.

Navrhněte co nejefektivnější algoritmus a zformulujte jej jako program v Pascalu, který odpoví na dotaz (nebo více dotazů), zda mezi vrcholy i a j vede cesta. Využijte přitom násobení matic.

Řešení. Nechť matice M reprezentuje zadaný graf. Potom budeme chtít spočítat matici $S = M + M^2 + M^3 + ... + M^n$, přičemž $M^i = \underbrace{M \times M \times ... \times M}_{\text{i-krát}}$.

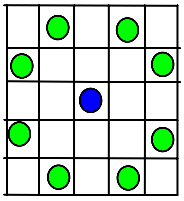
Všimněme si, že když na diagonále doplníme v matici M samé jedničky (hodnoty pravda), tj. přičteme k matici M jednotkovou matici I, tak $S = (M + I)^n$. Zdůvodnění plyne z binomické věty (každá mocnina až do n-té je v rozvoji zastoupena) a z toho, že se jedná o Boolovské matice (to znamená, že na koeficientech v binomickém rozvoji nezáleží, lze je brát jako jedničky). Stačí tedy umět rychle spočítat n-tou mocninu Boolovské matice. Všimněme si dále, že $(M + I)^2 = M_2 = (M + I) \times (M + I)$, $(M + I)^4 = M_4 = M_2 \times M_2$, $(M + I)^8 = M_8 = M_4 \times M_4$, atd. K výpočtu n-té mocniny matice tedy potřebujeme $\lceil \log_2 n \rceil$ násobení matic. Jedno maticové matic typu $n \times n$ vyžaduje n^3 operací (postupuje se přesně podle definice maticového násobení). Celkem tedy potřebujeme $\lceil \log_2 n \rceil n^3$ kroků na výpočet n-té mocniny Boolovské matice typu $n \times n$. Asymptotická časová složitost algoritmu tedy je $O(n^3 \log_2 n)$.

Zajímá-li nás nyní, zda mezi vrcholy i a j vede nějaká cesta, stačí se ve výsledné matici podívat na hodnotu na i-tém řádku a j-tém sloupci. Je-li tam hodnota 1 (pravda), pak je odpověď ano, jinak ne.

2. Halda v poli. Datovou strukturu halda je možné reprezentovat v poli. Nechť kořen haldy (nejmenší prvek) je v poli na prvním místě. Má-li uzel u v haldě nějakého potomka (nebo dva potomky), nechť jsou to uzly v (levý potomek) a w (pravý potomek), pak když u je v poli na místě i, je v v poli na místě $2*i$ a w je v poli na místě $2*i+1$. Napište v Pascalu program na vložení nového prvku do takto reprezentované haldy. Řešení pomocí obrázku jsme již ukazovali na jednom z minulých cvičení, nyní je třeba vše reprezentovat v rámci popsaného pole.

Řešení. DCV.

3. Koník. Je dána šachovnice o velikosti $n \times n$. Dále jsou zadány souřadnice políčka, na kterém stojí šachová figurka kůň, a souřadnice políčka, kam chceme koně pomocí dovolených tahů přesunout. Napište v Pascalu program, který nalezne nejkratší posloupnost tahů, kterými lze koně přesunou ze startovního políčka do cílového. Připomenutí dovolených tahů (modré kolečko značí výchozí pozici, zelená kolečka označují dovolené tahy):



Řešení. DCV.