Cvičení Programování I

Cvičící: **Pavel Surynek, KTIML,**
`pavel.surynek@seznam.cz`
Semestr: **Zima 2005/2006**
Kroužek: **Matematika/59**
Rozvrh: **Pátek 10:40-12:10 (učebna K2)**

Stručné poznámky ke cvičení ze 14.10.2005

1. Organizační záležitosti. Během semestru proběhnou dvě schůzky v počítačové laboratoři. První schůzka bude věnována seznámení se s vývojovým prostředím Turbo Pascal (Borland Pascal). V prostředí Turbo Pascal se bude skládat praktický test na zápočet, proto je zvládnutí práce v tomto programu důležité. Na druhé schůzce se bude konat praktický test „nanečisto“. Doporučuji, aby si všichni obstarali přístup k počítači s instalovaným Turbo Pascalem, případně s Free Pascalem, který je volně šiřitelný.

Jakékoli **dotazy** ke cvičení lze posílat na uvedenou e-mailovou adresu. Osobní konzultace ke cvičení lze dohodnout e-mailem (alespoň den předem).

2. Úloha o přelévání vody. K dispozici jsou dvě nádoby, jedna o objemu 5 litrů, druhá o objemu 3 litry. Dále je k dispozici neomezený zdroj vody. Vaším úkolem je pomocí daných dvou nádob odměřit 2 a 4 litry.

> **Řešení.** Snadné!

3. Úloha o vážení kuliček (těžší varianta). Je dáno 12 na pohled stejných kuliček. Jedna z kuliček má jinou hmotnost než ostatní, nevíme ale, jestli je těžší nebo lehčí. Zbylých 8 kuliček má stejnou hmotnost. Určete pomocí rovnoramenných vah kuličku s odlišnou hmotností. Opět si představte, že se za použití vah platí, snažte se tedy minimalizovat počet vážení. Pokuste se určit minimální počet použití vah bez toho, abyste úlohu řešili (použijte podobnou úvahu jako v lehčí variantě úlohy o vážení kuliček).

> **Řešení.** Máme 12 kuliček, to znamená 12 možností pro odlišnou kuličku. Zde ale navíc nevíme, zda je ta odlišná kulička lehčí nebo těžší. To jsou další 2 možnosti u každé z 12 možností. Celkem tedy musíme umět rozlišit mezi 24 možnostmi, pokud navíc chceme určit, zda je hledaná kulička lehčí nebo těžší. Nejmenší k, pro které je $3^k \geq 12$, resp. $3^k \geq 24$, je $k = 3$. V obou případech tedy potřebujeme aspoň 3 vážení. Konkrétní postup vypadá následovně.

1) Kuličky budeme rozdělovat do tří množin. 8 kuliček se stejnou hmotností budeme označovat jako *stejné*. První množina L bude obsahovat stejné kuličky nebo lehčí kuličku. Druhá množina S bude obsahovat pouze stejné kuličky. Nakonec množina T bude obsahovat stejné kuličky nebo těžkou kuličku. Na začátku jsou množiny T, L a S prázdné.

2) Kuličky rozdělíme do 3 hromádek po 4 kuličkách.

1. hromádka ○○○○ 2. hromádka ○○○○ 3. hromádka ○○○○

3) Vybereme libovolné dvě hromádky a ty zvážíme (jedna hromádka na levou misku vah, druhá na pravou). Bez újmy na obecnosti, nechť je to 1. a 3. hromádka.

4) Provedeme **první** vážení.

1. hromádka ○○○○ 3. hromádka ○○○○

4) Dostáváme tři možné výsledky.

Levá miska těžší → provedeme následující rozdělení kuliček do množin L, T a S.

- L: 3. hromádka ○○○○
- T: 1. hromádka ○○○○
- S: 2. hromádka ○○○○

Misky jsou stejně těžké → provedeme následující rozdělení kuliček do množin L, T a S.

- L: prázdná
- T: prázdná
- S: 1. hromádka ○○○○, 3. hromádka ○○○○

Pravá miska těžší → provedeme následující rozdělení kuliček do množin L, T a S.

- L: 1. hromádka ○○○○
- T: 3. hromádka ○○○○
- S: 2. hromádka ○○○○

4a) Předpokládejme, že nastala situace, kdy jsou misky stejně těžké. V tomto případě se úloha redukovala na nalezení odlišné kuličky mezi 4 zbylými.

5a) Rozdělíme zbylé kuličky na 3 hromádky. V 1. a 2. hromádce bude 1 kulička ve 3. hromádce budou 2 kuličky.

1. hromádka 2. hromádka 3. hromádka

1. hromádka 2. hromádka

6a) Zvážíme 1. a 2. hromádku (jedna hromádka na levou misku vah, druhá na pravou). **Druhé** vážení.

7a) Dostáváme tři možné výsled-

Levá miska těžší → provedeme následující rozdělení kuliček do množin L, T a S.

L	2. hromádka
T	1. hromádka
S	3. hromádka

8a) Zvážíme 1. hromádku a jednu kuličku z množiny S (jedna hromádka na levou misku vah, druhá na pravou). **Třetí** vážení.

1. hromádka jedna kulička z množiny S

9a) Dostáváme tři možné výsledky.

Levá miska těžší → hledaná kulička je na levé misce.

Misky jsou stejně těžké → hledaná kulička je v 2. hromádce.

Tento případ nenastává.

Miska jsou stejně těžké → provedeme následující rozdělení kuliček do množin L, T a S.

L	prázdná
T	prázdná
S	1. a 2. hromádka

8b) Zvážíme jednu kuličku z množiny S a jednu zbylou kuličku (jedna hromádka na levou misku vah, druhá na pravou). **Třetí** vážení.

jedna kulička ze zbylých jedna kulička z množiny S

9b) Dostáváme tři možné výsledky.

Levá miska těžší → hledaná kulička je na levé misce.

Misky jsou stejně těžké → hledaná je ta, co zbyla.

Misky jsou stejně těžké → hledaná kulička je na levé misce.

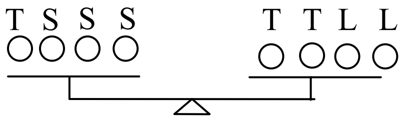
Pravá miska těžší → provedeme následující rozdělení kuliček do množin L, T a S.

L	1. hromádka
T	2. hromádka
S	3. hromádka

8c) Postupujeme podobně jako v případě 8a).

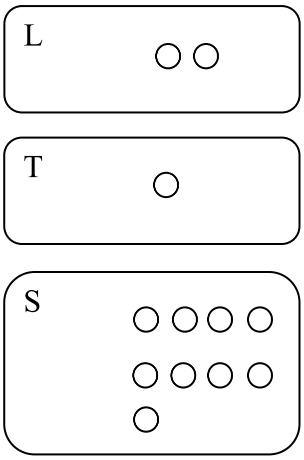
4b) Předpokládejme, že nastala situace, kdy je pravá miska těžší. Situace, kdy je těžší levá miska by se řešila stejně.

5b) Na levou misku dáme 1 kuličku z množiny T a 3 kuličky z množiny S. Na pravou misku dáme 2 kuličky z množiny T a 2 kuličky z množiny L. **Druhé** vážení.

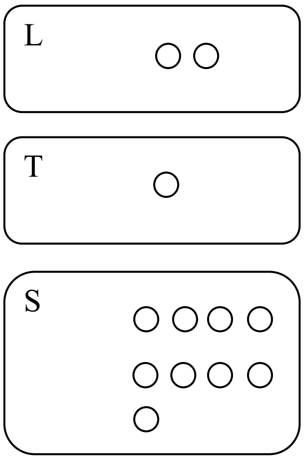


6b) Dostáváme tři možné výsledky.

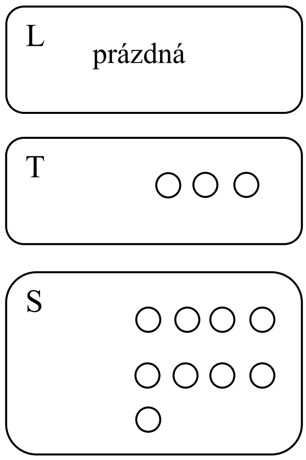
Levá miska těžší → kuličky z množin T a L, které nejsou na váze, přesuneme do množiny S. Kuličky z množiny T na pravé misce přesuneme do množiny S. Dostaneme následující rozdělení do množin L, T a S.



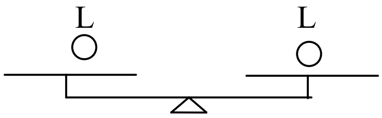
Misky jsou stejně těžké → všechny kuličky na váze přesuneme do množiny S. Dostaneme následující rozdělení do množin L, T a S.



Pravá miska těžší → kuličky z množin T a L, které nejsou na váze, přesuneme do množiny S. Kuličky z množiny L na pravé misce přesuneme do množiny S. Dostaneme následující rozdělení do množin L, T a S.



7b) Zvážíme kuličky z množiny L (jedna na levou misku, druhá na pravou misku). **Třetí** vážení.



7c) Těžší kuličku z množiny T určíme na jedno vážení stejně jako v předchozí úloze.

8b) Dostáváme tři možné výsledky.

Levá miska těžší → hledaná kulička je na pravé misce.

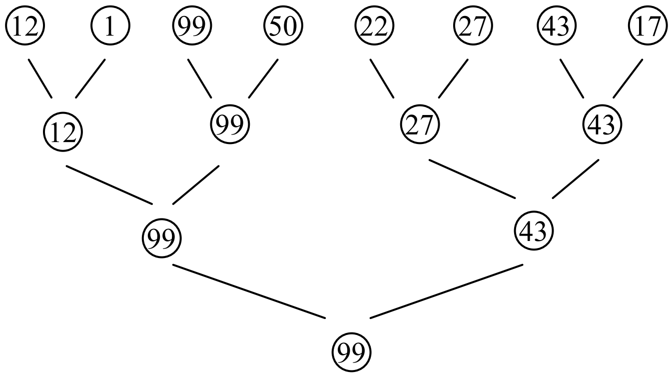
Misky jsou stejně těžké → hledaná kulička je v množině T.

Pravá miska těžší → hledaná kulička je na levé misce.

Pozn.: Na cvičení jeden pan kolega ukazoval lepší řešení, kdy v při druhém vážení v situaci 4a) vážíme 3 a 3 kuličky. Tímto postupem lze navíc ve všech případech zjistit, zda je hledaná jiná kulička lehčí nebo těžší.

4. Úloha o hledání nejtěžších kuliček. Je dáno N na pohled stejných kuliček. Každá z kuliček má jinou hmotnost. Najděte pomocí rovnoramenných vah nejtěžší kuličku. Najděte pomocí rovnoramenných vah druhou nejtěžší kuličku. Snažte se minimalizovat počet vážení.

Řešení. Hledání **nejtěžší** kuličky: vezmeme první kuličku, zvážíme ji s další kuličkou. Vítěznou kuličku si ponecháme a vážíme ji s další kuličkou. Vítěznou kuličku si opět ponecháme. Atd. Při posledním vážení je vítězná kulička nejtěžší. Při tomto postupu je použito $N-1$ vážení.
Hledání **druhé nejtěžší** kuličky: lze použít předchozí postup s tím, že nejprve dáme nejtěžší kuličku stranou a dále s ní nepracujeme. Pokud již víme, která kulička je nejtěžší, pak tento postup spotřebuje $N-2$ vážení. Pokud to nevíme, celý postup zabere $N-1+N-2=2N-3$.
Lze to ale **udělat lépe** (pomocí méně vážení). Použijeme stromové schéma (čísla v kroužku reprezentují hmotnosti kuliček).



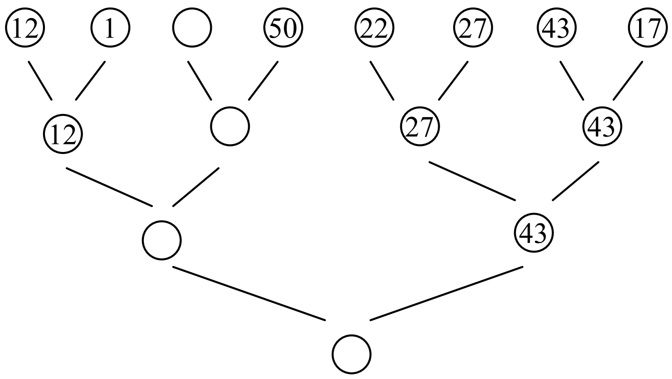
4 vážení (obecně $N/2$ vážení)

2 vážení (obecně $N/4$ vážení)

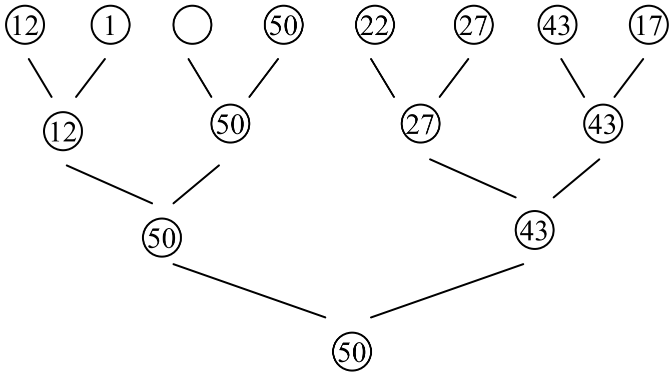
1 vážení (obecně $N/8$ vážení)

Celkem 7 vážení (obecně $N-1$ vážení)

Pro nalezení nejtěžší kuličky nám toto schéma oproti předchozímu postupu příliš nepomůže. Počet vážení je v obou případech stejný. Užitečnost schématu se projeví až při hledání druhé nejtěžší kuličky. Odstraníme ze schématu nejtěžší kuličku.



Nejtěžší kulička se vyskytuje na 4 místech (obecně na $\log_2 N - 1$ místech). V druhé fázi doplníme prázdná místa ve schématu, postupujeme odshora.



nejvýše 1 vážení (konkrétně žádné)

nejvýše 1 vážení (konkrétně jedno)

nejvýše 1 vážení (konkrétně jedno)

Celkem 2 vážení (obecně nejvýše $\log_2 N - 1$ vážení)

Pro nalezení nejtěžší a druhé nejtěžší kuličky potřebujeme celkem nejvýše $N - 1 + \log_2 N - 1 = N + \log_2 N - 2$, jinak řečeno „zhruba“ $N + \log_2 N$ vážení (kde slůvko „zhruba“ bude vysvětleno na přednášce).
Tímto postupem můžeme kuličky seřadit od nejtěžší k nejlehčí. Celkem na to spotřebujeme nejvýše „zhruba“ $N + N \log_2 N$, jinak řečeno „zhruba“ $N \log_2 N$.

Co znamená to „zhruba“ ?

Definice. Mějme dvě funkce $f : N \longrightarrow N$ a $g : N \longrightarrow N$. Říkáme, že f je asymptoticky menší nebo rovna g, označujeme f je $O(g)$ nebo $f \in O(g)$, právě když $\exists c \in R$, $c > 0$ takové, že pro skoro všechna $n \in N$ je $f(n) \leq cg(n)$. Přičemž pro skoro všechna $n \in N$ znamená pro všechna až na konečnou množinu, neboli $\exists n_0 \in N$, že pro $\forall n \in N, n > n_0$ daný výrok platí.

Užijeme-li tuto definici na příklad. Počet vážení potřebných k seřazení N kuliček od nejlehčí k nejtěžší pomocí výše popsaného stromového schématu je $O(N \log_2 N)$.

5. Hra sirky. Máme hromádku sirek. Hraje se tak, že se střídají dva hráči a odebírají z hromádky sirky. V každém tahu je možné odebrat 1,2 nebo 3 sirky. Prohrál ten hráč, na kterého už nic nezbylo. Navrhněte co nejlepší hrací strategii pro jednoho z hráčů.

Řešení. Stačí dostat protihráče do situace, kdy je na tahu a počet sirek na hromádce je dělitelný 4. Pak lze hrát tak, že protihráč určitě prohraje. Pro situaci, kdy jsou na hromádce 4 sirky to jistě platí (nepřítel něco odebere, my sebereme zbytek). Předpokládejme, že toto tvrzení platí pro 4k sirek na hromádce, kde k je přirozené číslo. Je-li nepřítel na tahu a na hromádce je 4(k+1) sirek, pak po nepřítelově tahu zbude 4(k+1)-1, 4(k+1)-2 nebo 4(k+1)-3 sirek. My pak vezmeme tolik sirek, aby na nepřítele zbylo 4k sirek. Že je to možné, je vidět.